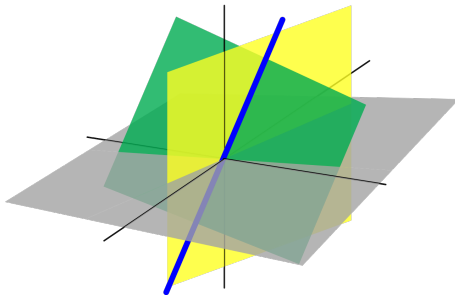


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 19 SEPTEMBRE

Jérôme Scherer



1.4.1 PRODUIT MATRICIEL, RAPPEL

Soit A une matrice $m \times n$. Les colonnes de A sont des vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

DÉFINITION

La multiplication matricielle est définie par la formule

$$A \cdot \vec{x} = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n$$

Ainsi le i -ème coefficient de $A \cdot \vec{x}$ vaut $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$.

On multiplie "ligne par colonne".

1.4.2 EXEMPLE

Nous voulons savoir pour quelles valeurs des paramètres b_1, b_2, b_3 le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} x + y + z = b_1 \\ -x - y + z = b_2 \\ x + y + 3z = b_3 \end{cases}$$

En d'autres termes nous voulons savoir quand le système suivant, écrit sous forme matricielle, est compatible (on a additionné la ligne 1 à la ligne 2 et soustrait cette même ligne à la troisième) :

pivots

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 2 & b_3 - b_1 \end{array} \right)$$

RÉSOLUTION (SUITE ET FIN).

$$\underline{L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 - b_2 \end{array} \right)$$

Ce système est compatible sss $b_3 - 2b_1 - b_2 = 0$, ce qui arrive quand $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ appartient au plan d'équation $b_3 - 2b_1 - b_2 = 0 \Leftrightarrow$

$$-2b_1 - b_2 + b_3 = 0 \Leftrightarrow 2b_1 = -b_2 + b_3$$

↑
inc. principales

↑
libres

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3$$

$$\begin{cases} b_1 = -\frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \\ b_2 = b_2 \\ b_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \left\{ b_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid b_2, b_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

1.4.3 LINÉARITÉ DU PRODUIT MATRICIEL

Soient A une matrice $m \times n$, des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME

- ❶ $A \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;
- ❷ $A \cdot (\alpha \vec{u}) = \alpha \cdot (A\vec{u})$.

Preuve. On compare simplement les coefficients de part et d'autre de l'égalité. Faisons-le pour l'action : Pour $1 \leq i \leq m$

$$\begin{aligned} A \cdot (\alpha \vec{u})_i &= (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{pmatrix} && \begin{array}{l} \text{def du} \\ \text{produit matriciel} \end{array} \\ &= a_{i1} \cdot \alpha u_1 + a_{i2} \cdot \alpha u_2 + \dots + a_{in} \cdot \alpha u_n && \begin{array}{l} \text{ass. de } \cdot \\ \text{dans } \mathbb{R} \end{array} \\ &= \alpha a_{i1} u_1 + \alpha a_{i2} u_2 + \dots + \alpha a_{in} u_n && \text{distributivité} \\ &= \alpha (a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + \dots + a_{in} u_n) = (\alpha \cdot A\vec{u})_i \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{def.}} = (A \cdot \vec{u})_i \end{aligned} \quad \square$$

1.4.4 THÉORÈME D'EXISTENCE A de taille $m \times n$.

THÉORÈME

Les affirmations suivantes sont toutes équivalentes.

- a L'équation $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution pour tout vecteur $\vec{b}$.
- b Tout vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^m$ est combinaison linéaire des colonnes de A .
- c Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.
- d Dans chaque **ligne** de A il y a un pivot.

Dans le point (d) on parle bien des pivots de la matrice A , pas de la matrice augmentée $(A|\vec{b})$, qui est la matrice du système $A\vec{x} = \vec{b}$.

PREUVE. (a) et (b) sont équivalents car $A\vec{x} = \vec{b}$ signifie par déf. du produit matriciel $x_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n = \vec{b}$, i.e.

$\vec{b}$ est combinaison linéaire des colonnes de A .

Ces affirmations sont équivalentes à (c) car les vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ engendrent $\mathbb{R}^m$ si ce sont des générateurs de $\mathbb{R}^m$, ce qui par déf. signifie que tout vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^m$ en est combinaison linéaire.

Passons à (d). Par la méthode Gauss $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution si la matrice augmentée $(A|\vec{b})$ est équivalente à une matrice échelonnée $(A'|\vec{b}')$ sans pivot dans la colonne $\vec{b}'$. Or $\vec{b}$ et donc $\vec{b}'$ peuvent prendre des valeurs arbitraires. On ne peut donc pas avoir de ligne nulle dans A' . Il doit donc y avoir un pivot dans chaque ligne de A' pour que le système soit compatible $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$. $\square$

EXEMPLES. ① $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité
de taille 3×3

I_3 a un pivot dans chaque ligne, donc $I_3 \vec{x} = \vec{b}$
a toujours une solution, à savoir $x_1 = b_1, x_2 = b_2, x_3 = b_3$

② $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ n'a
pas de solution pour le vecteur $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ a

toujours une solution car il y a un pivot dans
chaque ligne de la forme é donnée.

1.5 ECRITURE DES SOLUTIONS

Nous introduisons maintenant une méthode pour écrire proprement et sous forme vectorielle les solutions d'un système d'équations linéaires.

1.5.1 SYSTÈMES HOMOGENES, I

Soit A une matrice $m \times n$, les inconnues $x_1, \dots, x_n$ forment un vecteur colonne $\vec{x}$. On considère le système

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

EXEMPLE

On veut résoudre le système $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

La matrice augmentée associée est $(1 \ -1 \ 1 \mid 0)$. Elle est échelonnée et réduite !

Il y a **une** inconnue principale : x_1 et **deux** inconnues libres : x_2, x_3 .

Ainsi x_2, x_3 joueront le rôle de paramètres dans la description des solutions.

$$x_1 = x_2 - x_3$$

1.5.1 SYSTÈMES HOMOGENES, II

Pour décrire les solutions de $x_1 = x_2 - x_3$, on constate que x_2 peut prendre n'importe quelle valeur réelle s et de même $x_3 = t$. Ainsi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour $s, t \in \mathbb{R}$.

Autrement dit $S = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. C'est un **plan** car

ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

1.5.1 SYSTÈMES HOMOGÈNES, III

THÉORÈME

Les solutions S d'un système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ forment toujours un sous-espace de la forme $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$.

Remarques.

- Le nombre k est celui des inconnues secondaires.
- Si $k = 0$, alors $S = \text{Vect}\{\emptyset\} = \{\vec{0}\}$.
- Si $k = 1$ les solutions forment une droite, si $k = 2$, elles forment un plan, etc.

1.5.1 EXEMPLE

On veut résoudre le système homogène

$$\begin{cases} 2x_1 & -5x_2 & +8x_3 & = 0 \\ -2x_1 & -7x_2 & +x_3 & = 0 \\ 4x_1 & +2x_2 & +7x_3 & = 0 \end{cases}$$

Pour ce faire on lui associe la matrice augmentée qu'on échelonne et réduit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{2} & -5 & 8 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_2+L_1 \\ L_3-2L_1}]{L_2+L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 12 & -9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_2 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right)}]{L_3+L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

SUITE.

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 + 5L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 17/4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$8 + 5 \cdot (-3/4) = 17/4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 17/8 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17/8 x_3 \\ 3/4 x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

↑
principales

↑
libre

$$S = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -17/8 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -17 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

1.5.2 SYSTÈME INHOMOGÈNES, I

On travaille avec un système $A\vec{x} = \vec{b}$ et le vecteur $\vec{b} \neq \vec{0}$.

THÉORÈME

La solution générale S d'un système inhomogène compatible $A\vec{x} = \vec{b}$ s'écrit comme $\vec{p} + \text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$.

Remarques.

- 1 Le vecteur $\vec{p}$ est une **solution particulière** du système.
- 2 Le sous-espace $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est la solution générale du système homogène associé $A\vec{x} = \vec{0}$.

DÉMONSTRATION

Supposons que nous avons trouvé une solution particulière $\vec{p}$.

Soit $\vec{q}$ une solution **arbitraire** du système $A\vec{x} = \vec{b}$. Alors

$$\boxed{A\vec{p} = \vec{b} = A\vec{q}}$$

Ainsi

$$\vec{0} = A\vec{q} - A\vec{p} = A(\vec{q} - \vec{p})$$

Mais alors $\vec{q} - \vec{p}$ est une solution du système homogène associé !

Par conséquent $\vec{q} - \vec{p} \in \text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$. Autrement dit

$$\boxed{\vec{q} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k}$$

linéarité $A\vec{p} + \alpha_1 \underbrace{A\vec{v}_1}_{=\vec{0}} + \dots + \alpha_k \underbrace{A\vec{v}_k}_{=\vec{0}}$

Réciproque : il est clair que $A(\vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k) = \vec{b}$. $\square$

1.5.2 EXEMPLE

On veut résoudre le système inhomogène

$$\begin{cases} 2x_1 & -5x_2 & +8x_3 & = 2 \\ -2x_1 & -7x_2 & +x_3 & = -3 \\ 4x_1 & +2x_2 & +7x_3 & = 5 \end{cases}$$

Pour ce faire on lui associe la matrice augmentée qu'on échelonne et réduit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 2 \\ -2 & -7 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_2+L_1 \\ L_3-2L_1}]{L_2+L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 2 \\ 0 & -12 & 9 & -1 \\ 0 & 12 & -9 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_2 \cdot (-\frac{1}{12})}]{L_3+L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 2 \\ 0 & -12 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

SUITE.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 + 5L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 17/4 & 29/12 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$2 + 5 \cdot \frac{1}{12} = \frac{29}{12}$$

$$\xrightarrow{L_1 \cdot (\frac{1}{2})}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{17}{8} & \frac{29}{24} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\leadsto \begin{cases} x_1 = \frac{29}{24} - \frac{17}{8}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{12} + \frac{3}{4}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$x_3 = 0$ sol. particulière

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{29}{24} \\ \frac{1}{12} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -17/8 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} \frac{29}{24} \\ \frac{1}{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -17 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} \right]$$

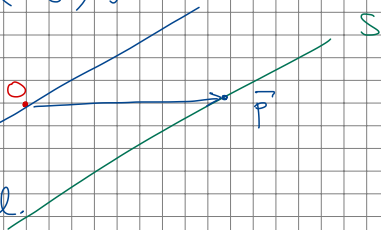
REMARQUES.

① $\begin{pmatrix} 29/24 \\ 1/12 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution particulière du système,

elle est donnée gratuitement quand le système est sous forme échelonnée et réduite, mais il y a d'autres choix possibles!

② La droite de solutions S est une droite affine,
translaté de $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$, droite qui passe
par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

③ comme $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas
solution, S n'est
pas un ss-espace vectoriel.



1.5.3 SYSTÈMES (IN)HOMOGÈNES, CONCLUSION

- ❶ La solution générale d'un système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
- ❷ La solution générale d'un système inhomogène $A\vec{x} = \vec{b}$ est un **translaté** d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
- ❸ Le choix de la solution particulière $\vec{p}$ n'est pas unique !
- ❹ Le choix des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ qui engendrent le sous-espace solution du système homogène n'est pas unique !
- ❺ Une fois la matrice augmentée du système échelonnée et réduite, ces choix sont imposés ! Merci Gauss.

EXEMPLES. ① $x_1 - x_2 + x_3 = 6$

$$\leadsto x_1 = 6 + x_2 - x_3$$

$$S = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\uparrow \\ x_2 = x_3 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1$$

② Soit $a \in \mathbb{R}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

W est un plan de $\mathbb{R}^4$, quand est-ce que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, autrement dit quand est-ce que W est la solution d'un système homogène?